

• Spazio affine $(A, f, V_n(\mathbb{K}))$

• Spazio affine = Spazio lineare

$$[P; W] = \{P + \vec{w} \mid \vec{w} \in W\}$$

• Riferimento affine: $\Gamma = (O, \mathcal{B})$

$O \in A$ punto
 $\mathcal{B}$ base di $V_n(\mathbb{K}) = \{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$

→ coordinatizzazione $\Phi_\Gamma: A \rightarrow \mathbb{K}^n$

$P \rightarrow (p_1, \dots, p_n)$ ove $\vec{OP} = \sum p_i \vec{e}_i$

N.B. $\Phi_\Gamma(P) = (p_1, \dots, p_n)$

$$\vec{v} = v_1 \vec{e}_1 + \dots + v_n \vec{e}_n$$

$$\Rightarrow \Phi_\Gamma(P + \vec{v}) = (p_1, \dots, p_n) + (v_1, \dots, v_n)$$

$$\Phi_\Gamma([P; W]) = \{ \Phi_\Gamma(P) + (w_1, \dots, w_n) \mid w_1 \vec{e}_1 + \dots + w_n \vec{e}_n \in W \}$$

DA cui SE

$$\begin{aligned} \bar{w}_1 &\equiv (w_{11} \dots w_{1n}) \\ &\vdots \\ \bar{w}_k &\equiv (w_{k1} \dots w_{kn}) \end{aligned} \quad \text{in cui per ora li riassume a } B$$

$$\Phi_n([P; w]) = \left\{ (p_1 \dots p_n) + \underbrace{\alpha_1 (w_{11} \dots w_{1n}) + \dots + \alpha_k (w_{k1} \dots w_{kn})}_{\substack{\text{soluzione} \\ \text{part.}}} \right\}$$

↓ sol. omog. associata.

nel $\mathbb{R}^n$ sottospazio lineare di dim = 1 = $[P; L(\bar{w}_1)]$

osservazione parametrica delle coord. dei punti di π .

$$\begin{cases} x_1 = p_1 + \alpha w_{11} \\ \vdots \\ x_n = p_n + \alpha w_{1n} \end{cases} \quad \bar{w}_1 \neq \underline{0} \quad \bar{w}_1 = w_{11} \bar{e}_1 + \dots + w_{1n} \bar{e}_n$$

oss Le soluzioni di sistemi lineari compatibili si rappresentano
sottospazi lineari.

Teorema:

Sia $AX=B$ un sistema lineare compatibile.

Allora le soluzioni del sistema rappresentano le coordinate dei punti di uno ^{spazio} spazio lineare di dimensione $n-k$ in uno spazio affine di dimensione n ove $k = \text{rk}(A) = \text{rk}(A|B)$ e $n = \text{numero di incognite}$.

Dici:

Sia $X_0 = \text{soluzione particolare di } AX=B$.

$W = \text{ker}(A) = \text{soluzioni del sistema}$

omogeneo associato $AX=0$.

$$S = [X_0; W]$$

o meglio dato uno sp. affine

$(A, f, V_n(k))$ ed un

risolimento $P = (0, B)$

con $B = (\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_r)$

si consideri il
sottospazio

Stiax

$$S' = [P'; W']$$

con

$$\vec{OP'} = \bar{e}_1 x_{01} + \dots + \bar{e}_n x_{0n}$$

(ovvero P' ha coord. x_0 rispetto a T).

$$P' = O + \bar{e}_1 x_{01} \dots + \bar{e}_n x_{0n}$$

W' è generato dai vettori di

V_n con componenti in W rispetto
la base

□

Def: Geometria affine
ove

$$A_n = \mathbb{K}^n, V_n(\mathbb{K}) = \mathbb{K}^n$$

$$\mathcal{F} := \{\mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n \\ (p, \alpha) \rightarrow \alpha \cdot p\}$$

$n=0 \Rightarrow AG(0, 1k)$ è un punto

$n=1 \Rightarrow AG(1, 1k) = 1k$ è una retta e

contiene tutti gli elementi di $1k$.

$$p(x) = 0$$

$n=2 \quad AG(2, 1k) = \text{è un piano.}$

DATI P, Q due punti distinti $\exists!$ retta π con $P, Q \in \pi$.

Sia Σ un sottospazio affine di $\dim \geq 1$ e consideriamo

$P, Q \in \Sigma \Rightarrow \Sigma = [P; W_1]$ con $\vec{PQ} \in W_1$ e

$$\dim W_1 = 1 \Rightarrow \Sigma = [P; L(\vec{PQ})]$$

una retta per P, Q esiste.

Supponiamo $\Sigma' = [X; W']$ retta per P, Q con $P, Q \in \Sigma'$

$$\Rightarrow \Sigma' = [P; W'] \text{ con } \vec{PQ} \in W' \Rightarrow W' = L(\vec{PQ}) \text{ perché}$$

$$\dim W' = 1 \text{ e } \vec{p} \neq \vec{0}.$$

Prima

Oss: Siano $\Sigma = [P; W]$ e $\Theta = [Q; U]$ due sottospazi affini (= sott. lineari).
Allora se $\Sigma \cap \Theta \neq \emptyset$ abbiamo

$$\Sigma \cap \Theta = [R; W \cup U] \text{ con } R \in \Sigma \cap \Theta$$

Dim: Se $\Sigma \cap \Theta \neq \emptyset \Rightarrow \exists R \in \Sigma \cap \Theta$ e dunque

$$\Sigma = [R; W] ; \Theta = [R; U]$$

Osserviamo che se $X \in \Sigma \cap \Theta \Leftrightarrow \vec{R}X \in W \Leftrightarrow \vec{R}X \in W \cap U$
 $\vec{R}X \in U$

$$\Rightarrow \Sigma \cap \Theta = [R; W \cap U]$$

□

Def: $\Sigma = [P; W]$ e $\Theta = [Q; U]$ sono paralleli

$$\Leftrightarrow W \subseteq U \text{ oppure } U \subseteq W.$$

In particolare se $\dim U = \dim W \Rightarrow \Sigma // \Theta \Leftrightarrow U = W$.

oss: Siano Σ e Θ due sottospazi paralleli.

Allora $\Sigma \cap \Theta = \emptyset$ oppure $\Sigma \subseteq \Theta$ oppure $\Theta \subseteq \Sigma$

In particolare se Σ, Θ retti $\Rightarrow \Sigma // \Theta \Rightarrow \Sigma = \Theta$ oppure $\Sigma \cap \Theta = \emptyset$

Siano $\Sigma // \Theta$. Se $\Sigma \cap \Theta \neq \emptyset \Rightarrow \exists R \in \Sigma \cap \Theta$ e

$$\Sigma \cap \Theta = [R; U \cap W]$$

ma se $U \subseteq W \Rightarrow \Sigma \cap \Theta = [R; U] = \Theta$

se $W \subseteq U \Rightarrow \Sigma \cap \Theta = [R; W] = \Sigma$ □

Axioma:

Siano π una retta e P un punto di $AG(2, K)$ con $P \notin \pi$. Allora $\exists!$ π' passante per P disgiunta da π e tale retta è la parallela ad π per P .

$\rightarrow$ l'unica retta di $AG(2, K)$ passante per P e disgiunta da π è la parallela ad π (cioè ha il medesimo spazio di traslazione).



$$P \notin \pi \text{ e } \pi // \pi \text{ e } P \in \pi \Rightarrow \Delta \neq \pi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta \cap \pi = \emptyset$$

oss: Sia π una retta di $AG(2, \mathbb{K}) \Rightarrow$

π ha equazione $ax + by = c$

cioè $\pi = \{ (x, y) \mid ax + by = c \}$ con $(a, b) \neq (0, 0)$.

Si Δ un'altra retta $a'x + b'y = c'$
con $(a', b') \neq (0, 0)$

$\pi \cap \Delta$ corrisponde alle soluzioni del

intorno
$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} c \\ c' \end{bmatrix}$$

$\text{rk}(A) \quad \text{rk}(A|B) \quad \#$

1	1	∞^1	$\pi \cap \Delta = \emptyset$ (nulla)
1	2	0	$\pi \cap \Delta = \phi \rightarrow ax + by = 0$ $\text{equiv.} \Rightarrow$
2	2	1	$\pi \cap \Delta = \{p\}$ $ax + by = 0$

$\Rightarrow$ il sottospazio di traslazione (= direzione) di π_0 che è dato da $a x + b y = 0$ ed il sottospazio di traslazione di λ che è dato da $a' x + b' y = 0$ sono gli stessi!

$\Rightarrow \pi_0 \parallel \lambda.$

DIM SINTESI

$$\pi_0 = [R, L(\bar{v})]$$

$$\lambda = [P, L(\bar{w})]$$

$$\pi_0 \cap \lambda = \emptyset \Rightarrow L(\bar{v}) = L(\bar{w}).$$

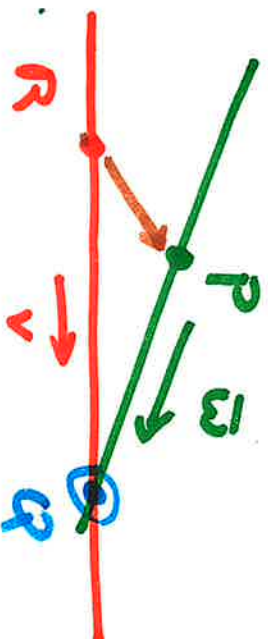
Mostriamo che $L(\bar{v}) \neq L(\bar{w}) \Rightarrow \pi_0 \cap \lambda \neq \emptyset$



$\kappa \cap \phi \neq \emptyset \Rightarrow \exists Q \in \kappa \cap \phi \Rightarrow \exists \alpha, \beta$ tali che

$$P + \alpha \bar{u} = R + \beta \bar{v}$$

$P \notin \kappa$



asseriamo che $\dim_L(\bar{v}, \bar{u}) = 2 = \dim \mathbb{K}^2$
 in particolare il vettore $\overrightarrow{RP}$ si potrà
 scrivere come $\gamma \bar{v} + \delta \bar{u}$

$$Q = R + \beta \bar{v} = P + \alpha \bar{u} = R + (\gamma \bar{v} + \delta \bar{u}) + \alpha \bar{u}$$

$$\beta \bar{v} = \gamma \bar{v} + (\delta + \alpha) \bar{u} \Rightarrow$$

$$\alpha = -\delta; \beta = \gamma$$

□

Se $u = [R; W]$ e $P \in AG(r, k) \Rightarrow \Delta = [P; W]$ è

la parallela ad r per P . (e quindi esiste).

Teorema:

Sia $\Sigma = [P; W]$ un sottospazio affine (lineare) di $AG(n, k)$. Allora esiste un insieme lineare di $n-k$ equazioni ove $k = \dim W$ in cui risolvere (le due i punti di Σ sono esattamente quelli (di coordinate) soluzioni di tale insieme).

DIM: $X \in \Sigma \Leftrightarrow \vec{PX} \in W \Leftrightarrow$ passando in coordinate $(X-P) \in L(W)$.

Sia $\bar{W}_1 = (w_{11} \dots w_{1n}) \dots \bar{W}_k = (w_{k1} \dots w_{kn})$ una

base d. u e (p₁...p_n) e coord. d. P.

$$(x-p) \in \mathcal{U} \Leftrightarrow (x-p) \in \mathcal{J}(\bar{\pi}_1, \dots, \bar{\pi}_k)$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 - p_1 & \dots & x_n - p_n \\ u_1 & \dots & u_n \\ \vdots & & \vdots \\ u_{k1} & \dots & u_{kn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{11} & \dots & u_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ u_{k1} & \dots & u_{kn} \end{bmatrix} = k$$

poiché $\dim U = k$ c'è un minore $k \times k$ nella matrice $\begin{bmatrix} u_{11} & \dots & u_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ u_{k1} & \dots & u_{kn} \end{bmatrix}$ con $\det \neq 0$

$\Rightarrow$ la condizione (*) diventa che tutti gli

$(n-k)$ or less & take min over all $\text{def} = 0$

$\Rightarrow$ λ_i offrono $(n-k)$ soluzioni lin. indipendenti $\square$

$n=2$

$$r_0 = [P; \mathcal{L}(\vec{v})]$$

$$P = (x_0, y_0)$$

$$\vec{v} = (e, m) \neq \underline{0}$$

$$rk \begin{pmatrix} x-x_0 & y-y_0 \\ e & m \end{pmatrix} = 1$$

$$(*) : m(x-x_0) = e(y-y_0)$$

$$\left[\frac{(x-x_0)}{e} = \frac{(y-y_0)}{m} \right]$$

$$x - x_0 = 0$$

$$m = 0$$

in entrambi i casi come (*)

retta di direzione (e, m)
per il punto (x_0, y_0) .

$$P = (x_0, y_0)$$

$$Q = (x_1, y_1)$$

$$\Rightarrow L(\vec{v}) = L(\vec{PQ}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{v} = (x_1 - x_0, y_1 - y_0)$$

$$\det \begin{pmatrix} x - x_0 & y - y_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0}$$

$$n=3$$

$$n_0 = [P; L(\vec{v})]$$

$$P = (x_0, y_0, z_0)$$

$$\vec{v} = (e, m, n) \neq \vec{0}$$

$$\pi_k \begin{pmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ e & m & n \end{pmatrix} = 1$$

$$\det \begin{pmatrix} x-x_0 & y-y_0 \\ e & m \end{pmatrix} = 0$$

$$\det \begin{pmatrix} y-y_0 & z-z_0 \\ m & n \end{pmatrix} = 0$$

$$\det \begin{pmatrix} x-x_0 & z-z_0 \\ e & n \end{pmatrix} = 0$$

$$\frac{x-x_0}{e} = \frac{y-y_0}{m}$$

$$\frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}$$

$$\frac{x-x_0}{e} = \frac{z-z_0}{n}$$

$$\left[\frac{x-x_0}{e} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n} \right]$$

$$P = (x_0, y_0, z_0)$$

$$Q = (x_1, y_1, z_1)$$

$$\Rightarrow (e, m, n) = (x_1 - x_0,$$

$$\frac{x-x_0}{x_1-x_0} = \frac{y-y_0}{y_1-y_0} = \frac{z-z_0}{z_1-z_0}$$

$$y_1 - y_0, z_1 - z_0)$$

In $AG(3, 1k)$

posizioni reciproche di 2 rette.

$$R : AX = B \quad \text{con} \quad \text{rk}(A) = \text{rk}(A|B) = 2 \quad A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix}$$

$$\hookrightarrow : A'X = B' \quad \text{con} \quad \text{rk}(A) = \text{rk}(A'|B') = 2. \quad A' = \begin{pmatrix} a'' & b'' & c'' \\ a''' & b''' & c''' \end{pmatrix}$$

$$\text{Ker} \cap : \begin{pmatrix} A \\ A' \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} B \\ B' \end{pmatrix} \quad A''X = B''$$

$$2 \leq \text{rk}(A) \leq 3$$

$\text{rk}(A'')$	$\text{rk}(A'' B'')$	$\#$	K
2	2	∞^1	$K = \emptyset$
2	3	0	$K // A$
3	3	1	$K \cap D = \{P\}$
3	4	0	$K \cap D = \emptyset$ ma K non è parallela ad D .

$$AX = \underline{0}$$

NON EQUIV
 $A'X = \underline{0}$

$$\text{Ker } A'' = \{0\}.$$

$K \cap D \cap \text{nono}$
 $\rightarrow$ sghembe.